

第六届全国大学生数学竞赛决赛试卷参考答案

(非数学类, 2015 年 3 月)

1) 极限 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du}$ 的值是 ----。答案 0

$$\text{解: } \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\left(\int_0^x e^{u^2} du\right)^2}{\int_0^x e^{2u^2} du} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2} \int_0^x e^{u^2} du}{e^{2x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2 \int_0^x e^{u^2} du}{e^{x^2}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2e^{x^2}}{2xe^{x^2}} = 0$$

(2) 设实数 $a \neq 0$, 微分方程 $\begin{cases} y'' - ay'^2 = 0 \\ y(0) = 0, y'(0) = -1 \end{cases}$ 的解是----。

答案: $y = -\frac{1}{a} \ln(ax+1)$ 解: 记 $p = y'$, 则 $p' - ap^2 = 0$, 就是

$$\frac{dp}{p^2} = adx, \text{ 从而 } -\frac{1}{p} = ax + c_1, \text{ 由 } p(0) = -1 \text{ 得 } c_1 = 0. \text{ 故有}$$

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{1}{ax}, \quad y = -\frac{1}{a} \ln(ax + c_2). \text{ 再有 } y(0) = 0 \text{ 得 } c_2 = 1, \text{ 故 } y = -\frac{1}{a} \ln(ax + 1).$$

(3) 设 $A = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ -1 & 1 & \lambda \end{pmatrix}$, 则 $A^{50} = \text{-----}$ 。

$$\text{答案: } \begin{pmatrix} \lambda^{50} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{50} & 0 \\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & \lambda^{50} \end{pmatrix}$$

解: 记 $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, 则 B^2 为零矩阵, 故

$$A^{50} = (\lambda E + B)^{50} = \lambda^{50} E + 50\lambda^{49} B = \begin{pmatrix} \lambda^{50} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda^{50} & 0 \\ -50\lambda^{49} & 50\lambda^{49} & \lambda^{50} \end{pmatrix}.$$

(4) 不定积分 $I = \int \frac{x^2+1}{x^4+1} dx$ 是-----。

$$I = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{x} \right) + c \quad \text{或} \quad I = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[\arctan(\sqrt{2}x-1) + \arctan(\sqrt{2}x+1) \right] + c$$

解:
$$I = \int \frac{1 + \frac{1}{x^2}}{x^2 + \frac{1}{x^2}} dx = \int \frac{1}{2 + \left(x - \frac{1}{x}\right)^2} d\left(x - \frac{1}{x}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}} \arctan \frac{1}{\sqrt{2}} \left(x - \frac{1}{x}\right) + c$$

(5) 设曲线积分 $I = \oint_L \frac{xdy - ydx}{|x| + |y|}$, 其中 L 是以 $(1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1)$ 为顶点的正方形的边界曲线, 方向为逆时针, 则 $I = \text{---}$ 。

答案: 4

解: 曲线 L 的方程为 $|x| + |y| = 1$, 记该曲线所围区域为 D 。由格林公式

$$I = \oint_L xdy - ydx = \iint_D (1+1) dx dy = 2\sigma(D) = 4$$

(6) 设 D 是平面上由光滑封闭曲线围成的有界区域, 其面积为 $A > 0$, 函数 $f(x, y)$ 在该区域及其边界上连续, 函数 $f(x, y)$ 在 D 上连续且 $f(x, y) > 0$. 记 $J_n = \left(\frac{1}{A} \iint_D f^{1/n}(x, y) d\sigma \right)^n$,

求极限 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n$.

答案: $\exp \left(\frac{1}{A} \iint_D \ln f(x, y) d\sigma \right)$

解. 设 $F(t) = \frac{1}{A} \iint_D f^t(x, y) d\sigma$, 则 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \lim_{t \rightarrow 0^+} (F(t))^{1/t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \exp \frac{\ln F(t)}{t}$.

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln F(t)}{t} = \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\ln F(t) - \ln F(0)}{t - 0} = (\ln F(t))'|_{t=0} = \frac{F'(0)}{F(0)} = F'(0).$$

故有 $\lim_{n \rightarrow +\infty} J_n = \exp(F'(0)) = \exp \left(\frac{1}{A} \iint_D \ln f(x, y) d\sigma \right)$.

二 (本题满分12分) 设 $\vec{l}_j, j=1,2,\dots,n$ 是平面上点 P_0 处的 $n \geq 2$ 个方向向量, 相邻两个向量之间的夹角为 $\frac{2\pi}{n}$ 。若函数 $f(x,y)$ 在点 P_0 有连续偏导, 证明 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j} = 0$ 。

证: 不妨设 $\vec{l}_j$ 为单位向量, 且设

$$\vec{l}_j = \left(\cos\left(\theta + \frac{j2\pi}{n}\right), \sin\left(\theta + \frac{j2\pi}{n}\right) \right), \quad \nabla f(P_0) = \left(\frac{\partial f(P_0)}{\partial x}, \frac{\partial f(P_0)}{\partial y} \right),$$

则有 $\frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j} = \nabla f(P_0) \cdot \vec{l}_j$ 。.....(6分)

因此 $\sum_{j=1}^n \frac{\partial f(P_0)}{\partial \vec{l}_j} = \sum_{j=1}^n \nabla f(P_0) \cdot \vec{l}_j = \nabla f(P_0) \cdot \sum_{j=1}^n \vec{l}_j = \nabla f(P_0) \cdot \vec{0} = 0$ (12分)

三 设 A_1, A_2, B_1, B_2 均为 n 阶方阵, 其中 A_2, B_2 可逆。证明: 存在可逆阵 P, Q 使

$PA_iQ = B_i (i=1,2)$ 成立的充要条件是 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似。

证 若存在可逆阵 P, Q 使 $PA_iQ = B_i (i=1,2)$, 则 $B_2^{-1} = Q^{-1}A_2^{-1}P^{-1}$, 所以

$B_1B_2^{-1} = PA_1A_2^{-1}P^{-1}$, 故 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似。.....(6分)

反之, 若 $A_1A_2^{-1}$ 和 $B_1B_2^{-1}$ 相似, 则存在可逆阵 C , 使 $C^{-1}A_1A_2^{-1}C = B_1B_2^{-1}$ 。于是

$C^{-1}A_1A_2^{-1}CB_2 = B_1$ 。令 $P = C^{-1}$, $Q = A_2^{-1}CB_2$, 则 P, Q 可逆, 且满足

$$PA_iQ = B_i (i=1,2) \quad \text{.....(14分)}$$

四 设 $p > 0$, $x_1 = \frac{1}{4}$, $x_{n+1}^p = x_n^p + x_n^{2p}$ ($n=1,2,\dots$), 证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+x_n^p}$ 收敛并求其和。

【解】 记 $y_n = x_n^p$, 由题设, $y_{n+1} = y_n + y_n^2$, $y_{n+1} - y_n = y_n^2 \geq 0$, 所以 $y_{n+1} \geq y_n$ 。.....(2分)

设 y_n 收敛, 即有上界, 记 $A = \lim_n y_n \geq \left(\frac{1}{4}\right)^p > 0$ 。从而 $A = A + A^2$, 所以 $A=0$, 矛盾。

故 $y_n \rightarrow +\infty$ 。.....(8分)

由 $y_{n+1} = y_n(1+y_n)$, 即 $\frac{1}{y_{n+1}} = \frac{1}{y_n(1+y_n)} = \frac{1}{y_n} - \frac{1}{1+y_n}$ 得

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{1+y_k} = \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{y_k} - \frac{1}{y_{k+1}} \right) = \frac{1}{y_1} - \frac{1}{y_{n+1}} \rightarrow \frac{1}{y_1} = 4^p。 \quad \text{.....(14分)}$$

五 (1) 展 $[-\pi, \pi)$ 上的函数 $f(x) = |x|$ 成傅里叶级数, 并证明 $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$.

(2) 求积分 $I = \int_0^{+\infty} \frac{u}{1+e^u} du$ 的值.

解 (1) $f(x)$ 为偶函数, 其傅里叶级数是余弦级数.

$$a_0 = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x dx = \pi,$$

$$a_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} x \cos nx dx = \frac{2}{\pi n^2} (\cos n\pi - 1) = \begin{cases} -\frac{4}{\pi n^2}, & n=1, 3, \dots \\ 0, & n=2, 4, \dots \end{cases}.$$

由于 $f(x)$ 连续, 所以当 $x \in [-\pi, \pi)$ 有

$$f(x) = \frac{\pi}{2} - \frac{4}{\pi} \left(\cos x + \frac{1}{3^2} \cos 3x + \frac{1}{5^2} \cos 5x + \dots \right).$$

令 $x=0$ 得到 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}$. 记 $s_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$, $s_2 = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^2}$, 则 $s_1 - s_2 = \frac{1}{4}s_1$, 故

$$\text{得 } s_1 = \frac{4s_2}{3} = \frac{\pi^2}{6}. \quad \dots\dots\dots(5 \text{ 分})$$

(2) 记 $g(u) = \frac{u}{1+e^u}$, 则在 $[0, +\infty)$ 上成立

$$g(u) = \frac{ue^{-u}}{1+e^{-u}} = ue^{-u} - ue^{-2u} + ue^{-3u} - \dots.$$

记该级数的前 n 项和为 $S_n(u)$, 余项为 $r_n(u) = g(u) - S_n(u)$. 则由交错 (单调) 级数的性质

$$|r_n(u)| \leq ue^{-(n+1)u}.$$

因为 $\int_0^{+\infty} ue^{-nu} du = \frac{1}{n^2}$, 就有 $\int_0^{+\infty} |r_n(u)| du \leq \frac{1}{(n+1)^2}$, 这样就有

$$\int_0^{+\infty} g(u) du = \int_0^{+\infty} S_n(u) du + \int_0^{+\infty} r_n(u) du = \sum_{k=1}^n (-1)^{k-1} \frac{1}{k^2} + \int_0^{+\infty} r_n(u) du \dots\dots\dots(13 \text{ 分})$$

由于 $\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{+\infty} r_n(u) du = 0$, 故

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots.$$

$$\text{所以 } I + \frac{1}{2}s_1 = s_1. \text{ 再由(1)所证得 } I = \frac{s_1}{2} = \frac{\pi^2}{12}. \quad \dots\dots\dots(15 \text{ 分})$$

六 设 $f(x, y)$ 为 R^2 上的非负连续函数, 若 $I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) d\sigma$ 存在有限, 则称广义积分 $\iint_{R^2} f(x, y) d\sigma$ 收敛于 I .

(1) 设 $f(x, y)$ 为 R^2 上非负且连续. 若 $\iint_{R^2} f(x, y) d\sigma$ 收敛于 I , 证明极限 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{-t \leq x, y \leq t} f(x, y) d\sigma$ 存在且收敛于 I .

(2) 设 $\iint_{R^2} e^{ax^2 + 2bxy + cy^2} d\sigma$ 收敛于 I , 其中实二次型 $ax^2 + 2bxy + cy^2$ 在正交变换下的标准型为 $\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$. 证明 λ_1 和 λ_2 都小于 0.

解. (1) 由于 $f(x, y)$ 非负,

$$\iint_{x^2+y^2 \leq t^2} f(x, y) d\sigma \leq \iint_{-t \leq x, y \leq t} f(x, y) d\sigma \leq \iint_{x^2+y^2 \leq 2t^2} f(x, y) d\sigma.$$

当 $t \rightarrow +\infty$, 上式中左右两端的极限都收敛于 I , 故中间项也收敛于 I(3 分)

(2) 记 $I(t) = \iint_{x^2+y^2 \leq t^2} e^{ax^2+2bxy+cy^2} dx dy$, 则 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I(t) = I$.

记 $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$, 则 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = (x, y)A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$. 因 A 实对称, 存在正交矩阵 P 使得

$P^T A P = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{pmatrix}$, 其中 λ_1, λ_2 是 A 的特征值, 也就是标准型的系数.

在变换 $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ 下, 有 $ax^2 + 2bxy + cy^2 = \lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2$. 又由于

$$u^2 + v^2 = (u, v) \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = P(x, y) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} P^T = (x^2 + y^2) P P^T = x^2 + y^2,$$

故变换把圆盘 $x^2 + y^2 \leq t^2$ 变为 $u^2 + v^2 \leq t^2$, 且 $\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = |P| = 1$

$$I(t) = \iint_{u^2+v^2 \leq t^2} e^{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv = \iint_{u^2+v^2 \leq t^2} e^{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2} du dv.$$

由 $\lim_{t \rightarrow +\infty} I_t = I$ 和 (1) 所证得: $\lim_{t \rightarrow +\infty} \iint_{-t \leq u, v \leq t} e^{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2} du dv = I$. 在矩形上分离积分变量得,

$$\iint_{-t \leq u, v \leq t} e^{\lambda_1 u^2 + \lambda_2 v^2} du dv = \int_{-t}^t e^{\lambda_1 u^2} du \int_{-t}^t e^{\lambda_2 v^2} dv = I_1(t) I_2(t).$$

因为 $I_1(t)$ 和 $I_2(t)$ 都是严格单调增加, 故 $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_{-t}^t e^{\lambda_1 u^2} du$ 收敛, 就有 $\lambda_1 < 0$.

同理 $\lambda_2 < 0$(15 分)